ANÁLISIS DE VIGAS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS CON ELEMENTOS DE ALTO ORDEN PARA RESOLVER PROBLEMAS DE CARGA DISTRIBUIDA

Olmedo Fernando

Departamento de Energía y Mecánica DECEM
Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Sangolquí, Ecuador

RESUMEN

El trabajo descrito a continuación, fue realizado con el objetivo de encontrar una solución más precisa a los problemas de vigas cuando se utiliza el método de los elementos finitos, como también utilizar el programa MathCAD para implementar esta solución. Por lo que se propone como primera instancia la aproximación de un polinomio de grado cinco para la función de desplazamiento transversal de la viga. A lo largo del trabajo, se mostrará el desarrollo detallado de la teoría y luego ejemplos de aplicación como demostración de las ventajas para su uso.

ABSTRACT

The work described below was conducted in order to find more precise solutions to the typical beam problems when finite element method is used, as well as using the MathCAD program to implement this solution. It is proposed as a first approximation for the transversal displacement of the beam, a polynomial with degree five for the function of transverse displacement of the beam. Throughout the work, detailed development of the theory will be presented, as well as application problems, showing the advantage of the use of the given method.

1 INTRODUCCIÓN

Los textos que abordan la teoría de elementos finitos en el apartado correspondiente a vigas, utiliza una función cúbica para describir el desplazamiento. Esta función genera resultados exactos cuando las cargas son puntuales, pero cuando la carga es distribuida existe una incompatibilidad en el momento ya que al ser este igual a la segunda derivada del desplazamiento se generara una representación lineal del mismo. Esta dificultad es solventada conforme se aumentan el número de nodos o lo que es lo mismo discretizando la viga, conforme se incremente el número de elementos finitos los resultados obtenidos serán más cercanos a los resultados que predice la teoría de vigas.

Recibido: Enero de 2014
Aceptado: Marzo de 2014

La alternativa que se propone es incrementar el orden de la función de desplazamiento mediante la inclusión de un nodo interno. Por lo tanto la propuesta es desarrollar una función de alto orden de modo que con apenas uno o dos elementos finitos dependiendo del problema, se alcance mejor exactitud que con el método tradicional de solución (polinomio cúbico). Los pasos a seguir serán básicamente proponer una nueva función de desplazamiento incrementando el grado del polinomio, derivar las funciones de interpolación N_i, desarrollando una matriz de rigidez que incrementará la exactitud de cualquier problema de vigas. Adicionalmente estos problemas se pueden resolver ventajosamente con las herramientas de cálculo simbólico del software MathCAD proporcionando un contexto pedagógico muy amplio para la explicación conceptual del método de los elementos finitos.

2 PRINCIPIOS TEÓRICOS

En el presente numeral se revisara la metodología para obtener la formulación del elemento finito del elemento viga en su forma clásica. Una viga es un elemento largo y delgado, sujeto a carga transversal que produce significativos efectos de flexión, esta flexión es medida como un desplazamiento transversal y una rotación, por lo tanto los grados de libertad por nodo son dos. Para un elemento finito de longitud L, se tendrán $\mathrm{f_i}, \mathrm{m_i}, \mathrm{d_i}, \phi_\mathrm{i}$, ver figura 1.

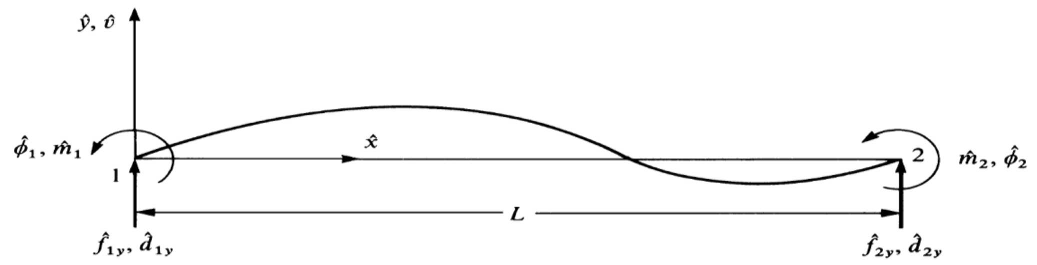


Figura 1 Deformación de una viga

Dónde: $\mathbf{f_{1y}}$, $\mathbf{m_1}$**;** corresponden a fuerza y momento local del nodo 1.
$\mathbf{d_{1y}}, \emptyset_\mathbf{1}$**;** corresponden a desplazamiento y rotación del nodo 1.

Se tiene por lo tanto que la ecuación diferencial que gobierna una viga, se obtiene del desarrollo de la viga de Euler-Bernoulli, cuyo principio es que las secciones planas, inicialmente perpendiculares al eje de la viga, seguirán siendo perpendiculares al eje de la viga, aun cuando este se haya curvado, ver Figura 2b.

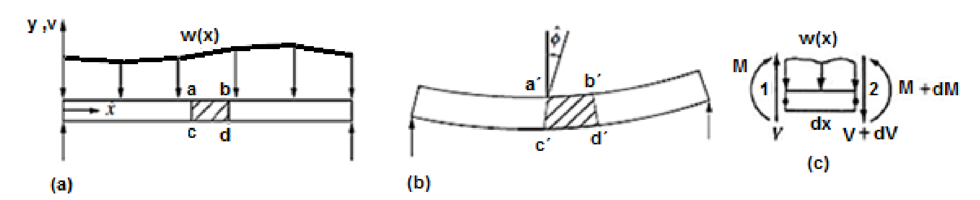


Figura 2 a) viga sin deformar b) Viga deformada debido a carga aplicada c) Elemento diferencial de una viga[1].

En primer lugar se efectúa el análisis de equilibrio del elemento diferencial, mostrado en la figura 2c.

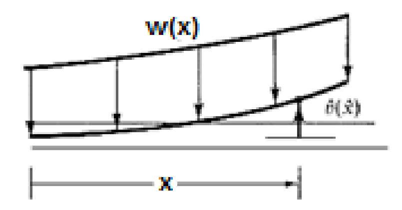


Figura 3 Relación desplazamiento rotación

$$\sum \mathrm{Fy} = 0; \quad \mathrm{V} - \mathrm{V} - \mathrm{dV} - \mathrm{w(x)} * \mathrm{dx} = 0; \quad \mathrm{w(x)} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} \tag{1}$$

$$\sum \mathrm{M} = 0; \; -\mathrm{V} * \mathrm{dx} + \mathrm{dM} + \mathrm{w(x)} * \mathrm{dx} * \left(\frac{\mathrm{dx}}{2}\right) = 0 \text{ o } \mathrm{V} = \frac{\mathrm{dM}}{\mathrm{dx}} \tag{2}$$

Donde **V** es la fuerza cortante
M es el momento flector
w(x) es la carga distribuida

Recurriendo a la teoría de vigas, se determina que la ecuación constitutiva de la viga que relaciona solicitaciones con desplazamiento estará definida por:

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{E\,I}} \tag{3}$$

Donde **κ** es la curvatura y ρ es el radio de curvatura
E es el módulo de elasticidad
I es el momento de inercia

Por otro lado la distorsión angular según la figura (3) está dado por:

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}\,\nu(\mathrm{x})}{\mathrm{dx}} \tag{4}$$

[1] Logan, Daryl; *A FIRST COURSE IN THE FINITE ELEMENT METHOD,[UN PRIMER CURSO EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS]*

Donde: $\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{x})$ es el desplazamiento transversal de la viga y $\boldsymbol{\Phi}$**,** la rotación.

Adicionalmente se conoce que la curvatura se la define según (5):

$$\kappa = \frac{\frac{d^2 v(x)}{dx^2}}{\left[1+\left[\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right]^2\right]^{3/2}} \qquad (5)$$

Si para pequeña curvatura se tiene la ecuación (6):

$$\kappa = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M}{E\,I} \qquad (6)$$

Por lo tanto el Momento es igual a (7):

$$M = E\,I\,\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \qquad (7)$$

La fuerza cortante sería la derivada del momento según (8):

$$V = \frac{dM}{dx} = E\,I\,\frac{d^3 v(x)}{dx^3} \qquad (8)$$

Y la carga distribuida w(x) la derivada del cortante, según (9):

$$w(x) = -\frac{dV}{dx} = -E\,I\,\frac{d^4 v(x)}{dx^4} \qquad (9)$$

Se debe escoger por lo tanto un polinomio con cuatro constantes ya que este es el número de grados de libertad del elemento y de grado 3 que satisfaga la ecuación diferencial.

$$\nu(x) = a1\,x^3 + a2\,x^2 + a3\,x + a4 \qquad (10)$$

Con las condiciones de frontera apropiadas Fig. 1, se determinan las expresiones para las constantes a_i de (10)

$$\nu(x) = \frac{1}{L^3}(2x^3 - 3Lx^2 + L^3)\,d1y + \frac{1}{L^3}(x^3L - 2L^2x^2 + xL^3)\,\phi 1 + \frac{1}{L^3}(-2x^3 + 3Lx^2)\,d2y + \frac{1}{L^3}(x^3L - L^2x^2)\,\phi 2 \qquad (11)$$

Esta expresión se la reemplaza en (7) y (8), para ambos extremos de la viga y se obtiene finalmente la formulación del elemento finito que se va a denominar formulación clásica:

$$\begin{Bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{E\,I}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_{1y} \\ \phi_1 \\ d_{2y} \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \qquad (12)$$

3 OBTENCIÓN DE LAS FUNCIONES DE INTERPOLACIÓN N_i

Se propone ahora utilizar un elemento de alto orden con un nodo interno. Cuando se incrementa el orden del polinomio se dice que el método de refinamiento es "p-refinement". Se sabe por lo tanto que el elemento finito tendrá 6 grados de libertad, 2 por nodo, sujeto a fuerzas transversales y momentos (Figura 4) y que el nodo interno no se conecta con ningún elemento.

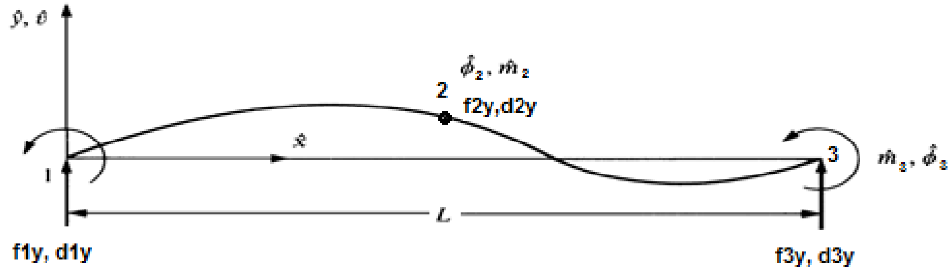


Figura 4 Elemento finito propuesto

Si se tienen 6 grados de libertad el polinomio de interpolación deberá ser de grado 5 de la forma siguiente:

$$v(x) = a1\,x^5 + a2\,x^4 + a3\,x^3 + a4x^2 + a5\,x^1 + a6$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = 5\,a1\,x^4 + 4\,a2\,x^3 + 3\,a3\,x^2 + 2\,a4\,x + a5$$

Las condiciones de frontera de acuerdo a la Figura 4, son:

$$x = 0;\ v(0) = d1y \qquad x = L/2;\ v(L/2) = d2y \qquad x = L;\ v(L) = d3y$$

$$x = 0;\ \frac{dv(0)}{dx} = \Phi 1 \qquad x = L/2;\ \frac{dv(L/2)}{dx} = \Phi 2 \qquad x = L;\ \frac{dv(L)}{dx} = \Phi 3$$

Y reemplazando y ordenando en forma matricial se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \left(\frac{L}{2}\right)^5 & \left(\frac{L}{2}\right)^4 & \left(\frac{L}{2}\right)^3 & \left(\frac{L}{2}\right)^2 & \left(\frac{L}{2}\right) & 1 \\ -5\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^4 & -4\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^3 & -3\cdot\left(\frac{L}{2}\right)^2 & -2\cdot\left(\frac{L}{2}\right) & -1 & 0 \\ L^5 & L^4 & L^3 & L^2 & L & 1 \\ -5\cdot L^4 & -4\cdot L^3 & -3\cdot L^2 & -2\cdot L & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ a3 \\ a4 \\ a5 \\ a6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d1y \\ \phi 1 \\ d2y \\ \phi 2 \\ d3y \\ \phi 3 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Se puede obtener el vector columna de incógnitas $[a_i]$ mediante:

$$[K] * [a] = [d] \quad \rightarrow \quad [a] = [K]^{-1} * [d]$$

$$\begin{pmatrix} \frac{24}{L^5} & -\frac{4}{L^4} & 0 & -\frac{16}{L^4} & -\frac{24}{L^5} & -\frac{4}{L^4} \\ -\frac{68}{L^4} & \frac{12}{L^3} & \frac{16}{L^4} & \frac{40}{L^3} & \frac{52}{L^4} & \frac{8}{L^3} \\ \frac{66}{L^3} & -\frac{13}{L^2} & -\frac{32}{L^3} & -\frac{32}{L^2} & -\frac{34}{L^3} & -\frac{5}{L^2} \\ -\frac{23}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{16}{L^2} & \frac{8}{L} & \frac{7}{L^2} & \frac{1}{L} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d1y \\ \phi 1 \\ d2y \\ \phi 2 \\ d3y \\ \phi 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{24 \cdot d1y}{L^5} - \frac{24 \cdot d3y}{L^5} - \frac{4 \cdot \phi 1}{L^4} - \frac{16 \cdot \phi 2}{L^4} - \frac{4 \cdot \phi 3}{L^4} \\ \frac{16 \cdot d2y}{L^4} - \frac{68 \cdot d1y}{L^4} + \frac{52 \cdot d3y}{L^4} + \frac{12 \cdot \phi 1}{L^3} + \frac{40 \cdot \phi 2}{L^3} + \frac{8 \cdot \phi 3}{L^3} \\ \frac{66 \cdot d1y}{L^3} - \frac{32 \cdot d2y}{L^3} - \frac{34 \cdot d3y}{L^3} - \frac{13 \cdot \phi 1}{L^2} - \frac{32 \cdot \phi 2}{L^2} - \frac{5 \cdot \phi 3}{L^2} \\ \frac{16 \cdot d2y}{L^2} - \frac{23 \cdot d1y}{L^2} + \frac{7 \cdot d3y}{L^2} + \frac{6 \cdot \phi 1}{L} + \frac{8 \cdot \phi 2}{L} + \frac{\phi 3}{L} \\ -\phi 1 \\ d1y \end{pmatrix}$$

El polinomio de interpolación se puede ensamblar multiplicando el vector fila $(x^5\ x^4\ x^3\ x^2\ x\ 1)$ por el resultado anterior [a]

$$(x^5\ x^4\ x^3\ x^2\ x\ 1) \begin{pmatrix} \frac{24\ d1y}{L^5} - \frac{24\ d3y}{L^5} - \frac{4\ \phi 1}{L^4} - \frac{16\ \phi 2}{L^4} - \frac{4\ \phi 3}{L^4} \\ \frac{16\ d2y}{L^4} - \frac{68\ d1y}{L^4} + \frac{52\ d3y}{L^4} + \frac{12\ \phi 1}{L^3} + \frac{40\ \phi 2}{L^3} + \frac{8\ \phi 3}{L^3} \\ \frac{66\ d1y}{L^3} - \frac{32\ d2y}{L^3} - \frac{34\ d3y}{L^3} - \frac{13\ \phi 1}{L^2} - \frac{32\ \phi 2}{L^2} - \frac{5\ \phi 3}{L^2} \\ \frac{16\ d2y}{L^2} - \frac{23\ d1y}{L^2} + \frac{7\ d3y}{L^2} + \frac{6\ \phi 1}{L} + \frac{8\ \phi 2}{L} + \frac{\phi 3}{L} \\ -\phi 1 \\ d1y \end{pmatrix} \qquad (14)$$

El resultado de esta operación genera un polinomio sumamente grande para ser desplegadas en el documento. Este polinomio se reagrupa de tal manera que las funciones de interpolación Ni puedan mostrarse en forma explícita y por tanto la función de desplazamiento se representara en la siguiente forma:

$$v(x) = N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3 \qquad (15)$$

Obteniendo el siguiente resultado para cada función de interpolación N_i:

$$N1(x) = 24\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 68\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 66\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 23\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1$$

$$N3(x) = 16\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 32\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$N5(x) = -24\left(\frac{x}{L}\right)^5 + 52\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 34\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 7\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$N2(x) = -4\,x\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 12\,x\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 13\,x\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\,x\left(\frac{x}{L}\right) - x$$

$$N4(x) = -16\,x\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 40\,x\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 32\,x\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 8\,x\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$N6(x) = -4\,x\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 8\,x\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 5\,x\left(\frac{x}{L}\right)^2 + x\left(\frac{x}{L}\right)$$

Para L=1 se pueden graficar las funciones de interpolación para verificar que tengan el valor de 1 en su nodo asociado y cero en los otros nodos, ver figura 5 y 6.

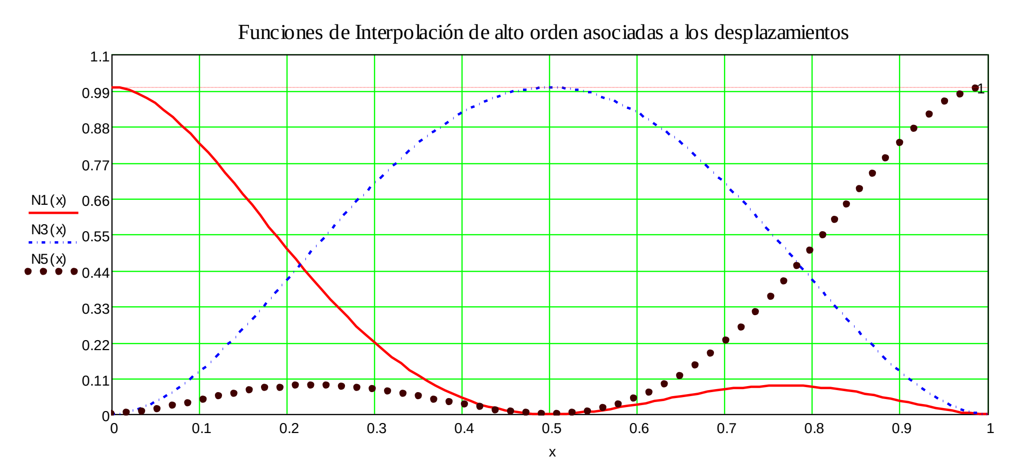


Figura 5 Funciones de interpolación de alto orden N1, N3, N5

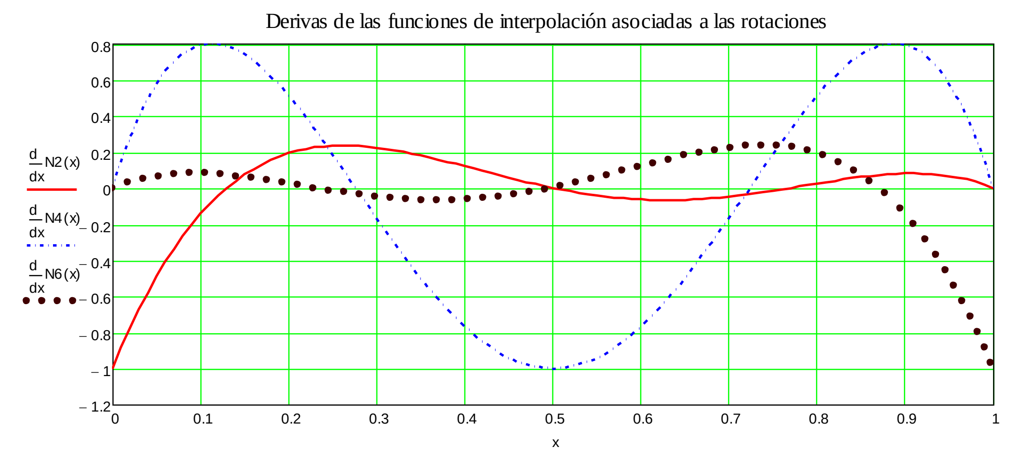


Figura 6 Derivadas de las funciones de interpolación de alto orden N2, N4, N6

4 OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

El paso más importante del procedimiento es determinar la matriz de rigidez para lo cual se seguirá la formulación dada por el método de Galerkin para vigas:

$$K_{ij} = E\, I_z \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2}\, dx \qquad (16)$$

Donde: $\mathbf{K_{ij}}$ es el término i, j de la matriz de rigidez.

Las integrales que deberán desarrollarse son las siguientes puesto que la matriz es siempre simétrica.

Para N_1

$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_1(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_2(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_3(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_4(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_5(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_1(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_6(x)}{dx^2}\right) dx$$

Para N_2

$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_2(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_2(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_2(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_3(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_2(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_4(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_2(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_5(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_2(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_6(x)}{dx^2}\right) dx$$

Para N_3…

$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_3(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_3(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_3(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_4(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_3(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_5(x)}{dx^2}\right) dx$$
$$\int_0^L \left(\frac{d^2N_3(x)}{dx^2} * \frac{d^2N_6(x)}{dx^2}\right) dx$$

Afortunadamente el programa MathCAD posee herramientas de cálculo simbólico que permite obtener facilmente estas integrales, como ejemplo se despliega k_{11} y k_{12}.

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2}\left[24\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 68\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 66\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 23\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left[24\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 68\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 66\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 23\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1\right] dx \rightarrow \frac{5092}{35\cdot L^3}$$

$$\int_0^L \frac{d^2}{dx^2}\left[24\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 68\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 66\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 23\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left[-4\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 12\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 13\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right) - x\right] dx \rightarrow -\frac{1138}{35\cdot L^2}$$

Obteniendo finalmente la matriz de rigidez y con ella la formulación de elemento finito dada por:

$$\begin{pmatrix} F1y \\ M1 \\ F2y \\ M2 \\ F3y \\ M3 \end{pmatrix} = E\cdot I\cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35\cdot L^3} & -\frac{1138}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{384}{7\cdot L^2} & -\frac{1508}{35\cdot L^3} & -\frac{242}{35\cdot L^2} \\ -\frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} \\ -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{1024}{5\cdot L^3} & 0 & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{128}{5\cdot L^2} \\ -\frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & 0 & \frac{256}{7\cdot L} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} \\ -\frac{1508}{35\cdot L^3} & \frac{242}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{5092}{35\cdot L^3} & \frac{1138}{35\cdot L^2} \\ -\frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} & -\frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d1y \\ \phi 1 \\ d2y \\ \phi 2 \\ d3y \\ \phi 3 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

5 CARGA DISTRIBUIDA

Como anteriormente se manifestó, los efectos de las cargas puntuales son exactamente evaluados cuando se utiliza la función de desplazamiento cúbica, mientras que cuando se utiliza carga distribuida necesariamente se debe discretizar la viga, por tal razón el enfoque será con respecto a esta carga. Las restricciones y las cargas son aplicadas únicamente en los nodos. La aproximación usual es reemplazar la carga distribuida con fuerzas nodales y momentos tal que el trabajo mecánico efectuado por las cargas nodales (19) sea igual al generado por la carga distribuida (18). El trabajo mecánico debido a la carga distribuida w está dado por:

$$W_{distribuida} = \int_0^L -w * \left(\nu(x)\right)dx \quad (18)$$

Donde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es la función desplazamiento. El trabajo generado por fuerzas discretas para tres nodos estaría dado por:

$$W_{discreto} = m1\ \phi 1 + m2\ \phi 2 + m3\ \phi 3 + f1\ d1y + f2\ d2y + f3\ d3y \quad (19)$$

Se igualan ambos trabajos según la expresión:

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = m1\ \phi 1 + m2\ \phi 2 + m3\ \phi 3 + f1\ d1y + f2\ d2y + f3\ d3y$$

Y se evalúa la integral para cada desplazamiento arbitrario:

1.- $d1y = 1, \phi 1 = 0, d2y = 0, \phi 2 = 0, d3y = 0, \phi 3 = 0$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = f1 = -\frac{7\ L\ w}{30}$$

2.- $d1y = 0, \phi 1 = 1, d2y = 0, \phi 2 = 0, d3y = 0, \phi 3 = 0$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = m1 = \frac{L^2\ w}{60}$$

3.- $d1y = 0, \phi 1 = 0, d2y = 1, \phi 2 = 0, d3y = 0, \phi 3 = 0$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = f2 = -\frac{8\ L\ w}{15}$$

4.- $d1y = 0, \phi 1 = 0, d2y = 0, \phi 2 = 1, d3y = 0, \phi 3 = 0$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = m2 = 0$$

5.- $d1y = 0, \phi 1 = 0, d2y = 0, \phi 2 = 0, d3y = 1, \phi 3 = 0$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3)dx = f3 = -\frac{7\ L\ w}{30}$$

$$\textbf{6.-}\ \ d1y = 0, \phi1 = 0, d2y = 0, \phi2 = 0, d3y = 0, \phi3 = 1$$

$$\int_0^L -w * (N_1(x)\, d1y + N_2(x)\, \phi_1 + N_3(x)\, d2y + N_4(x)\, \phi_2 + N_5(x)\, d3y + N_6(x)\, \phi_3) dx = m3 = -\frac{L^2\, w}{60}$$

Las fuerzas nodales equivalentes obtenidas están representadas en la siguiente figura 7.

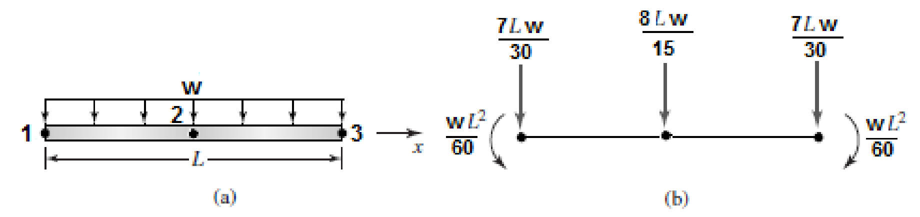


Figura 7 Fuerzas discretizadas equivalentes

6 EJEMPLO DE IMPLEMENTACIÓN EN MATHCAD

Seguidamente se realiza un ejemplo con el fin obtener la solución por el método de elementos finitos en base a la nueva matriz obtenida, así como comparar la solución tanto con la teoría de vigas como con los resultados obtenidos en base del polinomio cúbico. Se realiza por lo tanto el cálculo de una viga de acero biempotrada con un solo elemento finito, sometida a una carga distribuida $w = -100\ N/mm$, con una longitud $L = 1\ m$, de medidas 100 mm x 10mm. Las propiedades físicas son: E = 200000 MPa, b=10, h=100, $I = \frac{1}{12}\, b\, h^3$, ver figura 8.

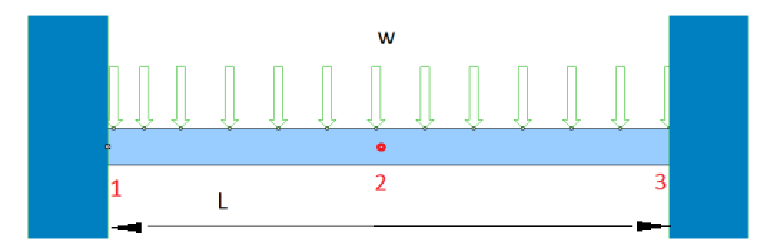


Figura 8 Viga biempotrada sometida a carga distribuida

Donde las condiciones de contorno son:

$$d1y = 0 \quad \phi1 = 0 \quad m2 = 0 \quad f2y = -8\frac{L\, w}{15} \quad d3y = 0 \ \ \phi3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} F1y \\ M1 \\ F2y \\ M2 \\ F3y \\ M3 \end{pmatrix} = E\cdot I\cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35\cdot L^3} & -\frac{1138}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{384}{7\cdot L^2} & -\frac{1508}{35\cdot L^3} & -\frac{242}{35\cdot L^2} \\ -\frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} \\ -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{1024}{5\cdot L^3} & 0 & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{128}{5\cdot L^2} \\ -\frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & 0 & \frac{256}{7\cdot L} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} \\ -\frac{1508}{35\cdot L^3} & \frac{242}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{5092}{35\cdot L^3} & \frac{1138}{35\cdot L^2} \\ -\frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} & -\frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d1y \\ \phi 1 \\ d2y \\ \phi 2 \\ d3y \\ \phi 3 \end{pmatrix} \text{solve}, d2y, \phi 2, F1y, M1, F3y, M3 \rightarrow \left(-\frac{L^4\cdot w}{384\cdot E\cdot I} \quad 0 \quad \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \quad -\frac{L^2\cdot w}{15} \quad \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \quad \frac{L^2\cdot w}{15} \right)$$

Como se puede observar la deflexión en el nodo 2 coincide con el valor teórico $y_{max} = -\frac{w\,L^4}{384\,E\,I}$ para la viga biempotrada.

Se efectúa la substitución inversa:

$$E\cdot I\cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35\cdot L^3} & -\frac{1138}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{384}{7\cdot L^2} & -\frac{1508}{35\cdot L^3} & -\frac{242}{35\cdot L^2} \\ -\frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} \\ -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{1024}{5\cdot L^3} & 0 & -\frac{512}{5\cdot L^3} & -\frac{128}{5\cdot L^2} \\ -\frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & 0 & \frac{256}{7\cdot L} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} \\ -\frac{1508}{35\cdot L^3} & \frac{242}{35\cdot L^2} & -\frac{512}{5\cdot L^3} & \frac{384}{7\cdot L^2} & \frac{5092}{35\cdot L^3} & \frac{1138}{35\cdot L^2} \\ -\frac{242}{35\cdot L^2} & \frac{38}{35\cdot L} & -\frac{128}{5\cdot L^2} & \frac{64}{7\cdot L} & \frac{1138}{35\cdot L^2} & \frac{332}{35\cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^4\cdot w}{384\cdot E\cdot I} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ -\frac{L^2\cdot w}{15} \\ -\frac{8\cdot L\cdot w}{15} \\ 0 \\ \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ \frac{L^2\cdot w}{15} \end{pmatrix}$$

Para determinar las fuerzas y momentos se resta del producto de la substitución inversa las fuerzas equivalentes obtenidas en el punto 5.

$$\{f\} = [K]\{d\} - \{f_0\} \qquad (20)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ -\frac{L^2\cdot w}{15} \\ -\frac{8\cdot L\cdot w}{15} \\ 0 \\ \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ \frac{L^2\cdot w}{15} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{7\cdot L\cdot w}{30} \\ \frac{L^2\cdot w}{60} \\ -\frac{8\cdot L\cdot w}{15} \\ 0 \\ -\frac{7\cdot L\cdot w}{30} \\ -\frac{L^2\cdot w}{60} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{L\cdot w}{2} \\ -\frac{L^2\cdot w}{12} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L\cdot w}{2} \\ \frac{L^2\cdot w}{12} \end{pmatrix}$$

La deformada se la obtiene a través de la función de desplazamiento transversal con las condiciones siguientes:

$$\mathrm{d2y} = -\frac{w\,L^4}{384\;E\,I}, \qquad \mathrm{d1y} = 0, \qquad \phi 1 = 0, \qquad \mathrm{d3y} = 0, \quad \phi 3 = 0$$

$$x := 0, 0.01 .. L$$

$$N1(x) := 24\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^5 - 68\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 66\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 23\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 1$$

$$N2(x) := -4\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 12\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 13\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 6\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right) - x$$

$$N3(x) := 16\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 32\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 16\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2$$

$$N4(x) := -16\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 40\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 32\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 8\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)$$

$$N5(x) := \left[-24\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^5 + 52\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 - 34\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 7\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2\right]$$

$$N6(x) := -4\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^4 + 8\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^3 - 5\cdot x\cdot\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{x^2}{L}$$

$$v\mathrm{FEA}(x) = N_1(x)\,\mathrm{d1y} + N_2(x)\,\phi_1 + N_3(x)\,\mathrm{d2y} + N_4(x)\,\phi_2 + N_5(x)\,\mathrm{d3y} + N_6(x)\,\phi_3 \quad (21)$$

Adicionalmente en el mismo gráfico se dibujara la curva elástica obtenida de la ecuación general de vigas

$$\mathrm{yED}(x) = \frac{1}{24\,E\,I}\left(-w\,x^2\right)(L - x)^2 \qquad (22)$$

Pudiendo observarse en la figura 9, la total concordancia de ambas curvas.

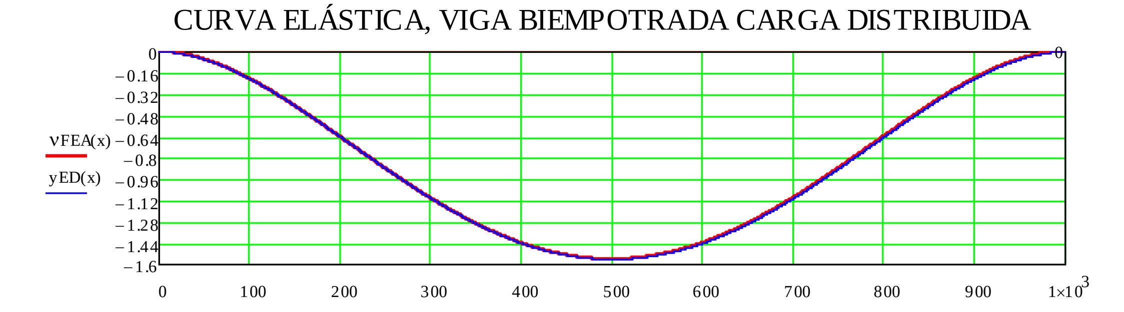


Figura 9 Comparativa curva (21) y (22)

Igualmente se obtiene el Momento, figura 10 a lo largo del eje mediante:

$$M(x) = E\,I\,\frac{d^2 vFEA(x)}{dx^2}$$

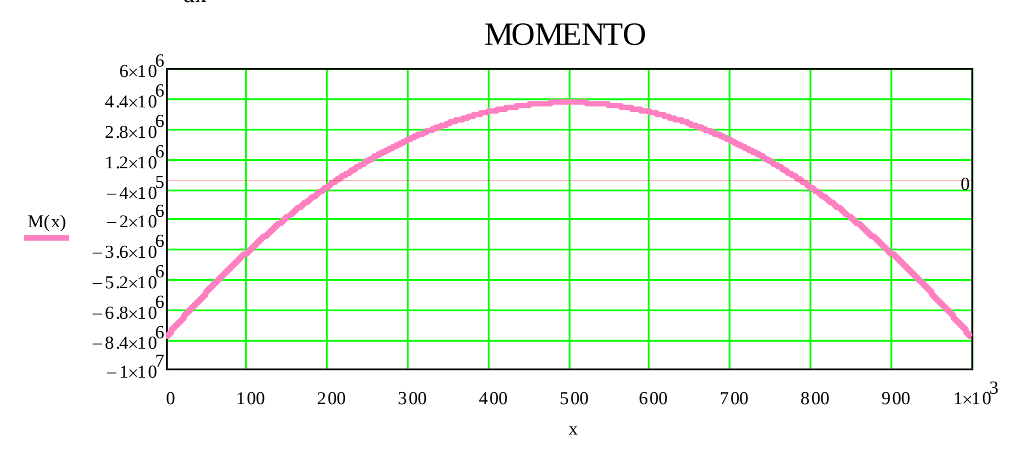


Figura 10 Momento obtenido para la teoría propuesta

Y el diagrama de cortante figura 11, con: $V(x) = E\,I\,\frac{d^3 vFEA(x)}{dx^3}$

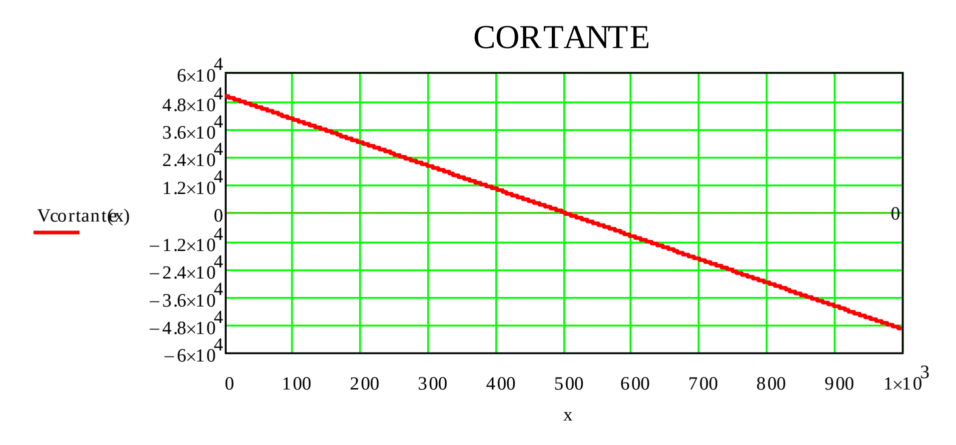
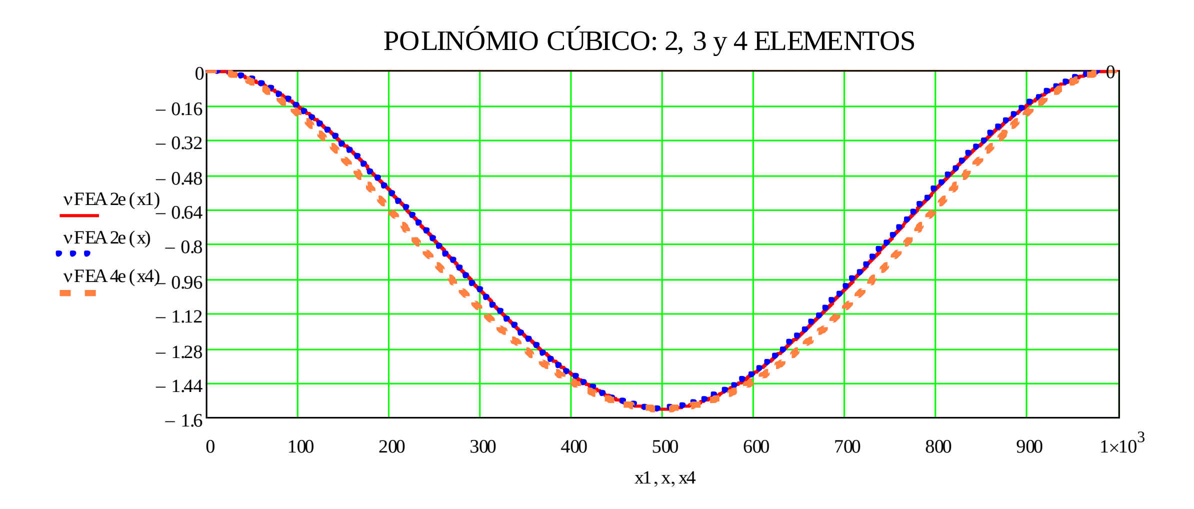


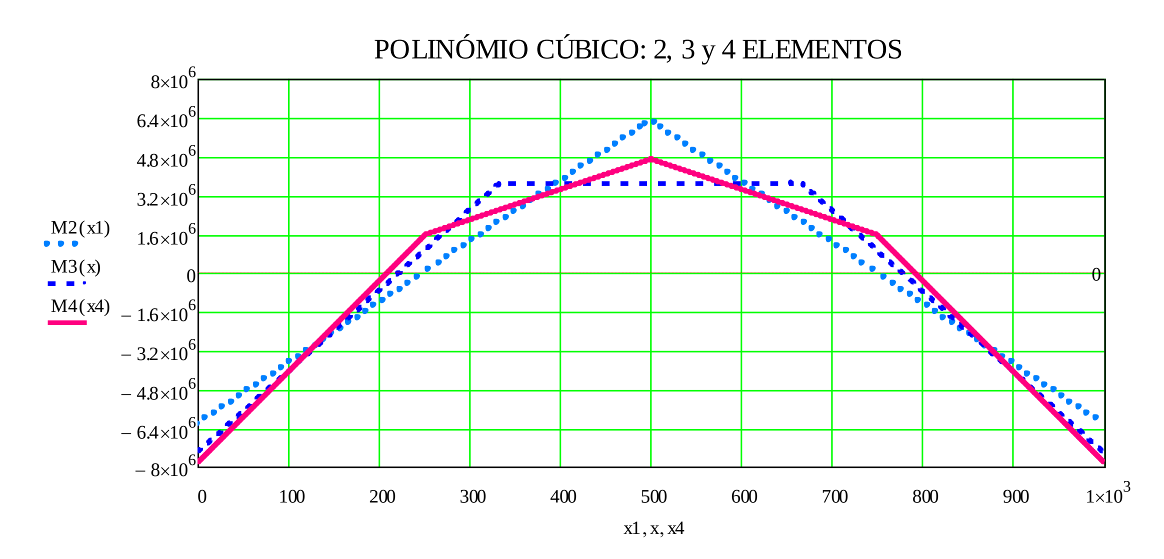
Figura 11 Momento obtenido para la teoría propuesta

Adicionalmente se efectuará el despliegue de las mismas funciones en la figura 12, cuando se utiliza el polinomio cúbico y se discretiza la viga mediante 2, 3 y 4 elementos finitos, utilizando la matriz (12).

CURVA ELÁSTICA:



MOMENTO:



CORTANTE:

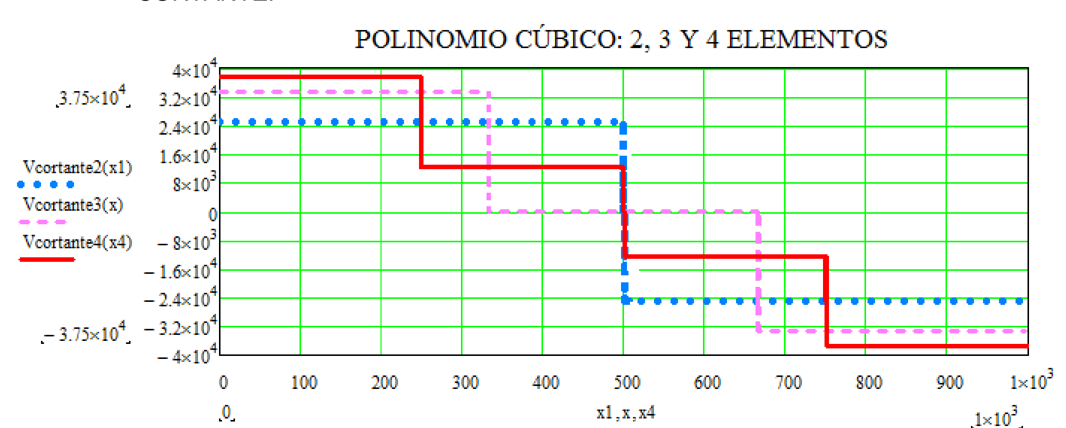


Figura 12 Curva elástica, Momento y Cortante obtenido con la teoría clásica de elementos finitos a partir del polinomio cúbico

Se observa que cuando se utiliza el polinomio cúbico, no existe compatibilidad con la teoría de vigas para el momento y cortante, la compatibilidad se logrará únicamente aumentando el número de elementos y así las funciones de momento y cortante convergerán con la curva presentada en la figura 10 y 11. Con 4 elementos finitos el valor del momento con el polinomio cúbico es de – 7.812 MN mm, con 1 elemento finito el valor del momento usando el polinomio propuesto de grado 5 es de -8.333 MN mm. La teoría de vigas predice

$$M = -\frac{w\,L^2}{12} = \frac{100\,\frac{N}{mm}(1000mm)^2}{12} = -8.333\ \mathrm{MN\ mm}$$

7 EJEMPLO DE IMPLEMENTACIÓN II

El segundo ejemplo, figura 13 consistirá en calcular una viga de acero biempotrada con un elemento finito, sometida a una carga distribuida w= $-100\mathrm{N/mm}$ hasta la mitad de la longitud de la viga, de una longitud $L = 1\ \mathrm{m}$, de medidas 100 mm x 10 mm. Las propiedades físicas son: E = 200000 MPa, b=10mm, h=100 mm, $I = \frac{1}{12}\ b\ h^3$. Este problema puede realizarse de dos formas: utilizando 2 elementos finitos, en ese caso la matriz de rigidez será de 10 x 10 o determinar por el método de igualación del trabajo generado por las cargas y utilizar un solo elemento finito, se va a optar por este último método.

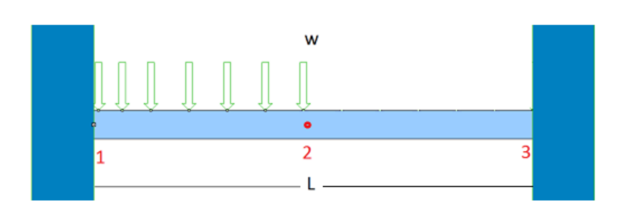


Figura 13 Viga biempotrada sometida a carga distribuida hasta la mitad de la viga

Efectuando la igualación del trabajo mecánico según el punto 5 se obtienen las fuerzas equivalentes siguientes según la figura 14:

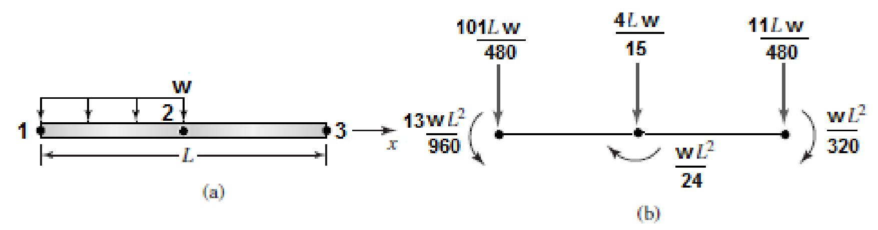


Figura 14 Fuerzas discretizadas equivalentes

Donde las condiciones de contorno son:

$$d1y = 0 \quad \phi 1 = 0 \quad m2 = -\frac{w\,L^2}{24} \quad f2y = -4\frac{L\,w}{15} \quad d3y = 0 \;\; \phi 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} F1y \\ M1 \\ F2y \\ M2 \\ F3y \\ M3 \end{pmatrix} = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35 \cdot L^3} & -\frac{1138}{35 \cdot L^2} & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & -\frac{384}{7 \cdot L^2} & -\frac{1508}{35 \cdot L^3} & -\frac{242}{35 \cdot L^2} \\ -\frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} \\ -\frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{1024}{5 \cdot L^3} & 0 & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & -\frac{128}{5 \cdot L^2} \\ -\frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & 0 & \frac{256}{7 \cdot L} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} \\ -\frac{1508}{35 \cdot L^3} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{5092}{35 \cdot L^3} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} \\ -\frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} & -\frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d1y \\ \phi 1 \\ d2y \\ \phi 2 \\ d3y \\ \phi 3 \end{pmatrix} \; \text{solve}, d2y, \phi 2, F1y, M1, F3y, M3 \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{L^4 \cdot w}{768 \cdot E \cdot I} & -\frac{7 \cdot L^3 \cdot w}{6144 \cdot E \cdot I} & \frac{47 \cdot L \cdot w}{240} & -\frac{7 \cdot L^2 \cdot w}{160} & \frac{17 \cdot L \cdot w}{240} & \frac{11 \cdot L^2 \cdot w}{480} \end{pmatrix}$$

Como se puede observar la deflexión en el nodo 2 en este caso es $y_{max} = -\frac{w\,L^4}{768\,E\,I}$.

Se efectúa la substitución inversa:

$$E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \frac{5092}{35 \cdot L^3} & -\frac{1138}{35 \cdot L^2} & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & -\frac{384}{7 \cdot L^2} & -\frac{1508}{35 \cdot L^3} & -\frac{242}{35 \cdot L^2} \\ -\frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} \\ -\frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{1024}{5 \cdot L^3} & 0 & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & -\frac{128}{5 \cdot L^2} \\ -\frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & 0 & \frac{256}{7 \cdot L} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} \\ -\frac{1508}{35 \cdot L^3} & \frac{242}{35 \cdot L^2} & -\frac{512}{5 \cdot L^3} & \frac{384}{7 \cdot L^2} & \frac{5092}{35 \cdot L^3} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} \\ -\frac{242}{35 \cdot L^2} & \frac{38}{35 \cdot L} & -\frac{128}{5 \cdot L^2} & \frac{64}{7 \cdot L} & \frac{1138}{35 \cdot L^2} & \frac{332}{35 \cdot L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^4 \cdot w}{768 \cdot E \cdot I} \\ -\frac{7 \cdot L^3 \cdot w}{6144 \cdot E \cdot I} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{47 \cdot L \cdot w}{240} \\ -\frac{7 \cdot L^2 \cdot w}{160} \\ -\frac{4 \cdot L \cdot w}{15} \\ -\frac{L^2 \cdot w}{24} \\ \frac{17 \cdot L \cdot w}{240} \\ \frac{11 \cdot L^2 \cdot w}{480} \end{pmatrix}$$

Para determinar las fuerzas y momentos se resta del producto de la substitución inversa las fuerzas equivalentes obtenidas en el punto 5.

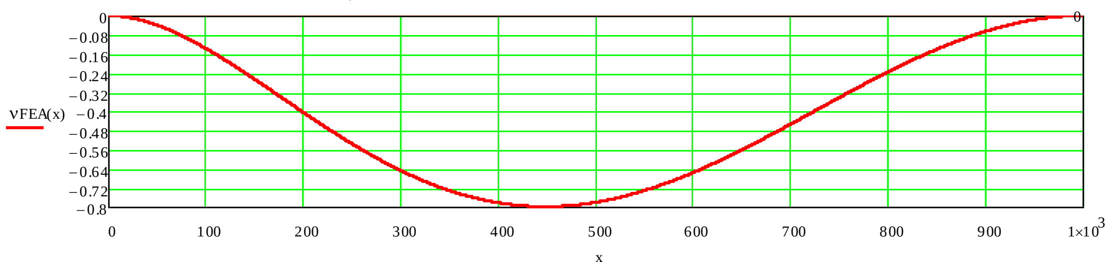
$$\{f\} = [K]\{d\} - \{f_0\}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ -\frac{L^2\cdot w}{15} \\ -\frac{8\cdot L\cdot w}{15} \\ 0 \\ \frac{4\cdot L\cdot w}{15} \\ \frac{L^2\cdot w}{15} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{7\cdot L\cdot w}{30} \\ \frac{L^2\cdot w}{60} \\ -\frac{8\cdot L\cdot w}{15} \\ 0 \\ -\frac{7\cdot L\cdot w}{30} \\ -\frac{L^2\cdot w}{60} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{L\cdot w}{2} \\ -\frac{L^2\cdot w}{12} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{L\cdot w}{2} \\ \frac{L^2\cdot w}{12} \end{pmatrix}$$

Finalmente generamos las curvas figura 15 mediante:

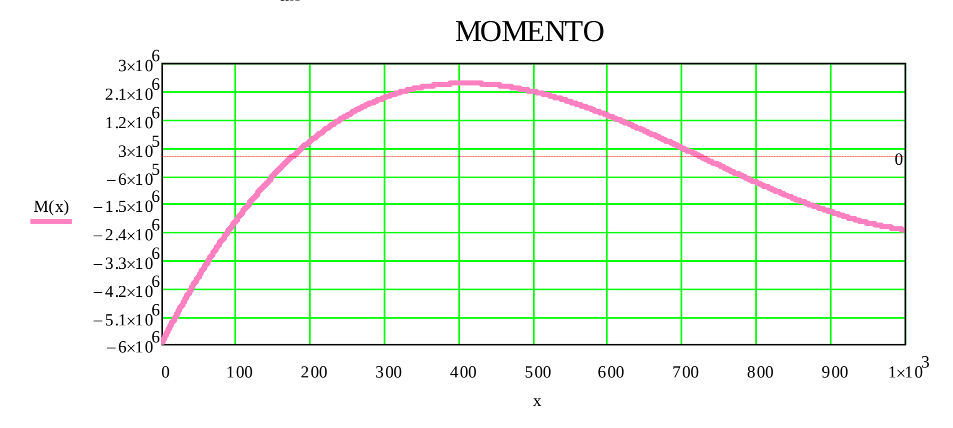
$$\upsilon FEA(x) = N_1(x)\ d1y + N_2(x)\ \phi_1 + N_3(x)\ d2y + N_4(x)\ \phi_2 + N_5(x)\ d3y + N_6(x)\ \phi_3$$

CURVA ELÁSTICA, VIGA BIEMPOTRADA CARGA DISTRIBUIDA HASTA 1/2L



Igualmente se obtiene el Momento a lo largo del eje mediante:

$$M(x) = E\,I\ \frac{d^2 vFEA(x)}{dx^2}$$



Y el diagrama de cortante con: $V(x) = E\,I\,\frac{d^3 vFEA(x)}{dx^3}$

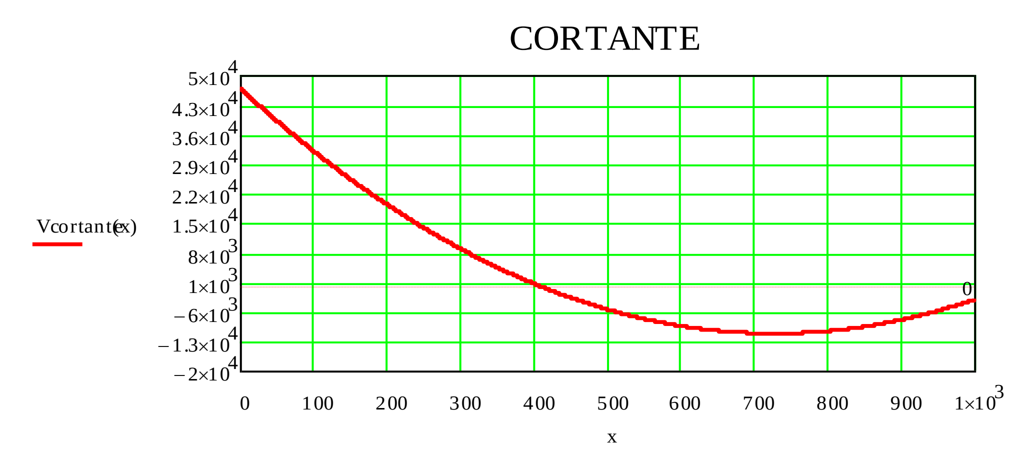


Figura 15 Curva elástica, momento y cortante

8 CONCLUSIONES

La utilización del programa MathCAD provee un efectivo y atractivo ambiente de aprendizaje del método de los elementos finitos para los estudiantes. El método propuesto es de fácil implementación y como se puede apreciar sumamente exacto, pudiendo ser aplicado a cualquier problema de ingeniería que involucre vigas o ejes. Si bien cuando se utiliza el método clásico el valor de las deflexiones no difiere, la incongruencia se da en el cálculo de los momentos y por ende de las tensiones por lo que se necesita discretizar. La alternativa a la discretización es utilizar elementos de alto orden y la obtención de fuerzas y momentos equivalentes de cualquier carga aplicada.

REFERENCIAS

1. Logan, Daryl; *A FIRST COURSE IN THE FINITE ELEMENT METHOD,[UN PRIMER CURSO EN EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS] Fifth Edition, CENGAGE LEARNING, Stamford, 2012.*

2. Hutton, David; *FUNDAMENTAL OF FINITE ELEMENT ANALYSIS, [FUNDAMENTOS DEL ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS] Second Edition, McGraw-Hill, New York, 2002.*

3. Reedy, J; *AN INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD, [INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS] Third Edition, McGraw-Hill, New York, 2005.*